

Barem orientativ de evaluare
Examenul de bacalaureat național 2022
Matematică M_mate-info

Test de antrenament T2 25.01.2022

Subiectul I**(30 puncte)**

1.	$\log_4(7 - \sqrt{5}) + \log_4(7 + \sqrt{5}) = \log_4(7 - \sqrt{5}) \cdot (7 + \sqrt{5}) = \log_4 44$ $\log_4 44 - \log_4 11 = \log_4 4$ $\log_4 4 = 1$	2p 2p 1p
2.	$a < 0, \operatorname{Im} f = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ $\operatorname{Im} f = \left[-\infty, \frac{19}{3}\right]$	3p 2p
3.	$-3x + 5 \geq 0$ $-3x + 5 = 4$ $x = \frac{1}{3}$	2p 2p 1p
4.	$P = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$ Cazurile posibile $a+b=7$. Finalizare $\frac{7}{90}$.	2p 2p 1p
5.	Ecuția dreptei ce trece printr-un punct $M(x_0, y_0)$ și are panta m : $y - y_0 = m(x - x_0)$ $d: 2x - 3y + 1 = 0 \quad m_d = -\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ Condiția ca dreptele să fie perpendiculare: $m_d \cdot m_{d'} = -1 \Rightarrow m_{d'} = -\frac{1}{m_d} = -\frac{2}{3}$ Ecuția este $2x + 3y + 3 = 0$	1p 1p 1p 2p
6.	Verificăm dacă $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 =$ $= 2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 1 = \frac{7}{9}$	3p 2p

Subiectul II**(30 puncte)**

1.	a) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$ $= O_3$	2p 3p
	b) $C_x \cdot C_y = \left(\frac{1}{3x^2} \cdot A + \frac{x}{3} \cdot B\right) \cdot \left(\frac{1}{3y^2} \cdot A + \frac{y}{3} \cdot B\right) = \frac{1}{9x^2y^2} \cdot A^2 + \frac{y}{9x^2} \cdot A \cdot B + \frac{x}{9y^2} \cdot B \cdot A +$ $+ \frac{1}{9} \cdot B^2 =$ $= \frac{1}{9(xy)^2} \cdot A^2 + \frac{xy}{9} \cdot B^2$ $A^2 = \frac{1}{3} \cdot A, B^2 = \frac{1}{3} \cdot B$ De unde $C_x \cdot C_y = C_{xy}$	1p 1p 2p 1p
	c) $C_t = \frac{1}{3t^2} \cdot A + \frac{t}{3} \cdot B$ de unde $3t^2 C_t = A + t^2 B, t \neq 0$	1p

	$A + t^2 B = \begin{pmatrix} 1 + 2t^2 & 1 - t^2 & 1 - t^2 \\ 1 - t^2 & 1 + 2t^2 & 1 - t^2 \\ 1 - t^2 & 1 - t^2 & 1 + 2t^2 \end{pmatrix}$ $\det(3t^2 C_t) = \begin{vmatrix} 1 + 2t^2 & 1 - t^2 & 1 - t^2 \\ 1 - t^2 & 1 + 2t^2 & 1 - t^2 \\ 1 - t^2 & 1 - t^2 & 1 + 2t^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 - t^2 & 1 - t^2 \\ 3 & 1 + 2t^2 & 1 - t^2 \\ 3 & 1 - t^2 & 1 + 2t^2 \end{vmatrix} =$ $= \begin{vmatrix} 3 & 1 - t^2 & 1 - t^2 \\ 0 & 3t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3t^2 \end{vmatrix} = 27t^4 \neq 0$	1p 2p 1p
	a) $x * y = \ln(e^x + e^y - 1)$ $\left. \begin{matrix} e^x \geq 1 \\ e^y \geq 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow e^x + e^y - 1 \geq 1$ $\Rightarrow \ln(e^x + e^y - 1) \geq 0$ $\Rightarrow x * y \in G$ b) Asociativitatea $(x * y) * z = x * (y * z) (\forall x, y, z \in G)$ $(x * y) * z = \ln(e^x + e^y - 1) * z = \ln(e^{\ln(e^x + e^y - 1)} + e^z - 1) =$ $= \ln(e^x + e^y + e^z - 2)$ $x * (y * z) = x * (\ln(e^y + e^z - 1)) = \ln(e^x + e^{\ln(e^y + e^z - 1)} - 1) =$ $= \ln(e^x + e^y + e^z - 2)$ $(x * y) * z = x * (y * z) (\forall x, y, z \in G)$ c) Prin inducție matematică Etapă de verificare: $x * x = \ln(e^x + e^x - 1) = \ln(2e^x - 1) \in A$ Etapă de demonstrare: Presupunem $P(k): x * x * \dots * x = \ln(ke^x - k + 1)$ $\Rightarrow P(k+1): x * x * \dots * x = \ln((k+1)e^x - k)$ $x * (x * \dots * x) = \ln(e^x + e^{x * \dots * x} - 1) = \ln(e^x + ke^x - k + 1 - 1) \in A$ $\Rightarrow x * x * \dots * x = \ln(ne^x - n + 1) (\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ $\ln(ne^x - n + 1) = 2x = \ln e^{2x}$ $ne^x - n + 1 = e^{2x} \Rightarrow (e^x - 1)(n - e^x - 1) = 0$ $\Rightarrow x \in \{0, \ln(n - 1)\} \subset G$	2p 2p 1p 2p 1p 1p 3p
Subiectul III		(30 puncte)
1.	a) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1}$ b) $f''(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} > 0$ $x \in (-1, 1)$ $a > 1$ c) Fie funcția $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, $a, b \in I$, $a < b$. Dacă f este continuă pe intervalul $[a, b]$, f este derivabilă pe (a, b), atunci există cel puțin un punct $c \in (a, b)$ astfel încât $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$. Pentru $a = \frac{1}{e}$ și $b = e$ aplicăm teorema: $\frac{f(\frac{1}{e}) - f(e)}{\frac{1}{e} - e} = f'(c)$	2p 3p 2p 2p 1p 2p 1p

	$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{\ln(1+e^2) - \ln \frac{1+e^2}{e^2}}{\frac{1}{e} - e} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{2c}{c^2 + 1}.$	1p
	Finalizare	1p
2.	a) $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctg \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big _0^1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$ $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x+x^2} dx =$ $= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x+1-1}{1+x+x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \frac{2x+1}{1+x+x^2} dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x+x^2} dx \right)$ $= \frac{1}{2} \cdot \ln(1+x+x^2) \Big _0^1 - \frac{1}{2} \cdot I_0$	2p
	Finalizare	1p
	d) $\frac{x^{n+1}}{1+x+x^2} \leq \frac{x^n}{1+x+x^2}$ pentru $n \in \mathbb{N}, x \in [0,1]$ Avem $I_{n+1} \leq I_n$, adică șirul este monoton descrescător $0 \leq I_n$ șirul este mărginit inferior Rezultă că șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ este convergent	1p 1p 1p 2p
	$0 \leq I_n;$ $\frac{x^n}{x^2+x+1} \leq x^n \Rightarrow I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1};$ Aplicând criteriul cleștelui rezultă că limita șirului este 0.	1p 2p 2p